Contrôle Probabilités et Statistiques

ENSA Kenitra, S4

D'après le concours EDHEC 2005

Avril 2011

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont: 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. Pour tout k de $\mathbb{N}^{\times}$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
2. Donner la loi de X_1.
3. En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^{\times}$, puis reconnaître la loi de T.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$
5. Pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
6. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\}, \quad P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$
7. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}, \quad P(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
8. Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
9. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
10. En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.
11. Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
12. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$

    Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$
13. En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.
14. Montrer enfin que: $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$

UNIVERSITE IBN TOFAIL
ENSAK

Probabilités-Statistiques

Examen, S4, 7 juin 2011

EXERCICE 1 *L'ADEME vous transmet le tableau suivant, qui recence les individus dans le monde selon le niveau CO2 qu'ils émettent:*

Emissions de CO2(tonnes de CO2 par habitant)	*Poulation par milions*
$[0,2[$	2205,79
$[2,4[$	1809,21
$[4,6[$	401,26
$[6,8[$	172,46
$[8,10[$	590,05
$[10,16[$	112,48
$[16,22[$	319,84

1. *Sur un même graphique:*
   (a) *Dessiner l'histogramme des fréquences de la distribution étudiée;*
   (b) *Dessiner le polygone des fréquences.*
2. *À la suite de la question précedente:*
   (a) *Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.*
   (b) *Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissantes sur un même graphique.*
3. *Déterminer les paramètres de tendance centrale de cette distribution*
4. *Déterminer les paramètres de dispersion.*
5. *Soit X la variable aléatoire égale (en tonnes)à l'émission de CO2. On suppose que cette distribution suit une loi normale $N(m;\sigma)$*
   (a) *Calculer m et σ.*
   (b) *Quelle est la probabilité que X dépasse la valeur 20?*
   (c) *Quelle est la probabilité que X soit comprise entre 10 et 11?*

EXERCICE 2 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(m, \sqrt{v})$ (paramètres inconnus), et $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de X. On définit les variables F_n et σ_n par $F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - F_n)^2$.*

1. *Montrer que F_n est un estimateur sans biais de m*
2. *Déterminer le risque quadratique de l'estimation de m par F_n*
3. *L'estimateur F_n est-il convergeant?*
4. *Déterminer le biais de l'estimation de v par σ_n.*
5. *Construire un estimateur sans biais de v.*
6. *Un sondage sur 200 individus, par rapport au choix entre 3 opérateurs telecom : A, B et C. Il y a 12 poucent qui choisissent A.*
   (a) *Donner une estimation de l'écart type de la distribution des individus choisissant A.*
   (b) *Donner un intervalle de confiance du pourcentage des individus choisissant A d'amplitude 0,1 (en pourcentage).*